# ПРОВЕРКА ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ ХАОТИЧЕСКИХ АТТРАКТОРОВ МОДЕЛЬНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**В.П. Круглов[1], С.П. Кузнецов[1,2]**
[1]*Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН*
[2]*Удмуртский государственный университет*
*E-mail: kruglovyacheslav@gmail.com*

В докладе представлены результаты компьютерной проверки гиперболичности хаотических аттракторов для нескольких моделей механических систем с аттрактором типа Смейла-Вильямса. Известно [1, 2], что устойчивое и неустойчивое подпространства однородно гиперболического аттрактора не пересекаются с нулевыми углами. Тест [3, 4] основан на статистическом анализе распределений углов пересечений между устойчивым и неустойчивым подпространствами аттрактора. Аттракторы типа Смейла-Вильямса имеют одномерное неустойчивое подпространство и устойчивое подпространство размерности не меньше двух.

Опишем алгоритм, имея в виду его применение к аттракторам (с одномерным неустойчивым многообразием) в сечении Пуанкаре систем обыкновенных дифференциальных уравнений. На первом этапе проверки необходимо численно решить уравнения системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x},t)$ совместно с уравнениями в вариациях $\boldsymbol{\delta}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}'(\mathbf{x},t)\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$, нормируя вектор возмущения на каждом шаге, пока не установится режим, соответствующий хаотическому аттрактору, а вектор возмущения будет принадлежать неустойчивому подпространству. На втором этапе вычисления продолжаются, на каждой итерации отображения Пуанкаре сохраняются в файл значения динамических переменных $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ и компонент вектора возмущения $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = \{\delta x_1, \delta x_2, ..., \delta x_k\}$. Этот участок траектории должен быть достаточно длинным. На третьем этапе решаются уравнения и записываются в файл значения динамических переменных $\mathbf{x}$ на каждой итерации отображения Пуанкаре. На четвертом этапе необходимо начать двигаться вдоль записанной в файл опорной траектории в обратном времени и численно решать сопряженные уравнения в вариациях $\boldsymbol{\delta}\dot{\mathbf{u}} = -[\mathbf{F}'(\mathbf{x},t)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$ (где $[\mathbf{F}'(\mathbf{x},t)]^{\mathrm{T}}$ - транспонированная матрица Якоби). Когда процедура доходит до участка траектории, где записывался вектор возмущения в прямом времени (второй этап), необходимо начать записывать вектор возмущения сопряженной системы на каждой итерации отображения Пуанкаре. В результате для точек на длинном отрезке траектории будет получен набор векторов $\{\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}_n\}$, касательных к неустойчивому многообразию, и набор векторов $\{\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_n\}$, ортогональных к устойчивому многообразию. В каждой точке можно найти угол $\beta_n \in [0, \pi/2]$ между векторами $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}_n$ и $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}_n$ по теореме косинусов. Соответственно, угол между устойчивым и неустойчивым подпространствами в этой точке равен $\alpha_n = \pi/2 - \beta_n$.

Описанный тест был применен к аттракторам четырех механических систем [5]: (а) частице, движущейся на плоскости под действием импульсных толчков, (б) системе двух взаимодействующих частиц, движущихся на дисках, вращающихся в противоположных направлениях, (в) струне с параметрическим возмущением стоячих волн модулированной накачкой (конечномерная модель), (г) системе трех ротаторов с потенциалом взаимодействия [6]. Для всех примеров продемонстрировано наличие режимов с однородно гиперболическими аттракторами. На рис. 1 *а*, *б*, *в, г* представлены гистограммы распределений углов пересечений устойчивых и неустойчивых подпространств аттракторов. На гистограммах для каждой модели распределения дистанцированы от нуля, что подтверждает предположение о гиперболичности аттракторов.

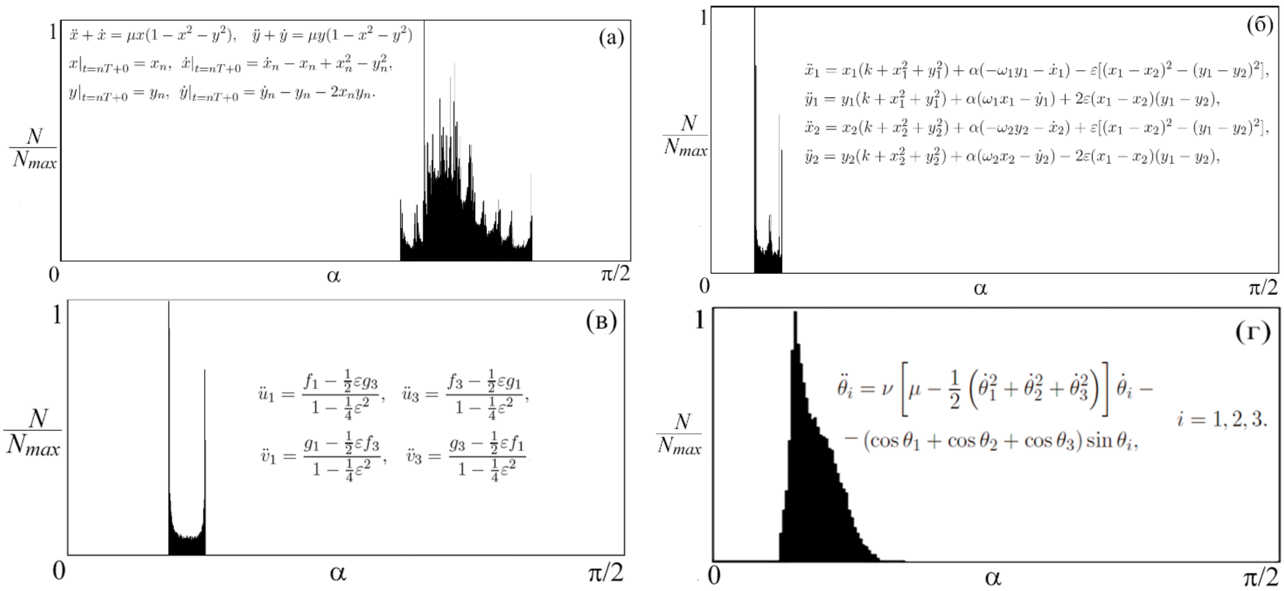


Рис. 1. Гистограммы распределений углов для (а) модели частицы, движущейся на плоскости под действием импульсных толчков ($\mu = 0.3,\ T = 4$), (б) модели двух взаимодействующих частиц, движущихся на дисках, вращающихся в противоположных направлениях ($k = 3,\ \alpha = 3,\ \varepsilon = 0.03,\ T = 16,\ \omega_0 = 2\pi$), (в) модели струны с параметрическим возмущением стоячих волн модулированной накачкой ($\omega_0 = 2\pi,\ k_0 = 2\pi,\ T = 40,\ L = 1,\ \alpha = 0.4,\ a_2^0 = 0.4,\ a_6^0 = 0.2,\ \gamma = 0.03,\ \varepsilon = 0.2$), (г) модели системы трех ротаторов с потенциалом взаимодействия ($\nu = 3,\ \mu = 0.04$).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 15-12-20035).*

**Библиографический список**

1. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
2. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 488 с.
3. *Lai Y.-C., Grebogi C., Yorke J.A., Kan I.* // Nonlinearity. 1993. Vol. 6. P. 779.
4. *Kuptsov P.V.* // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 85, № 1. 015203.
5. *Kuznetsov S.P., Kruglov V.P.* // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, No 2. P. 160–174.
6. *Kuznetsov S.P.* // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. Vol. 20, No 6. P. 649–666.